ゆさぶりのあるペースパターンの数学モデルによる表現

東　洋功*，小林一敏**

A Mathematical Method to Express Shake Pace Running Patterns

Hiroyoshi AZUMA and Kazutoshi KOBAYASHI

Abstract

The purpose of this study was to express, using a mathematical model, shake pace running patterns which focused on the running speed ratio in middle and long distance races. A trigonometric function for Discrete Fourier Transform (DFT) and an SIN wave changing amplitude that is function of time were used in mathematical models to explain shake pace running patterns.

From these shake pace running patterns, with only the time to goal decided, runners can determine an optional table of split times regardless of race time and distance, because the shake pace running pattern is expressed with a normalized velocity.

Using a calculated table of split times from shake pace running patterns will be useful for more effective practice for middle and long distances.

1．はじめに

中長距離走のレースにおいてペースパターンをどう設定するかは，自己記録の更新やレースの勝敗を決定するうえで非常に大きな影響をもつ[2,5]。ペースパターンは各区間を均等にしたイーブンペースが望ましいといわれるが[4]，実際のレースでは勝敗が絡んでくるため，かけ引きによるペースの上げ下げであるゆさぶりがレース中に多くみられる。実際のレースではペースにゆさぶりがあるので，中長距離走の練習でもあまりペースに変化のない練習ばかりを行うより，実際のレースを考え，より実践に近いゆさぶりのあるペースパターンの練習も取り入れた方がよいと考えられる。

しかし，ゆさぶりを入れたペースで練習を行おうと思っても各区間を何秒で走ればよいかは，ペースパターンがイーブンペースのときはゴールタイムを決まれば簡単に計算できるが，ペースパターンにゆさぶりがあるとペースが複雑に上下するので，ゴールタイムを考慮した各区間のタイムは容易には求められない。

そこで，今回は，より実践に近い形であるゆさぶりのあるペースパターンで練習が行えるよう，ゆさぶりを含めたペースパターンが設計でき，また各区間を何秒で走ればよいのかがゴールタイムに応じて求められる数学的手法について提案したい。

*研究生，**教授

2．方法

〈ゆさぶりのあるペースパターンの作成方法〉

ここでは10000mのレース[4]を参考にしてゆさぶりのあるペースパターンを数式で表現する方法を考えていく。

1）区間速度比の導入

ペースパターンを表すには，まず，全レース時間と全レース距離とが共に1となるように時間と距離を規格化する。規格化をすることで，レース時間の違いが消去され，異なるペースパターンでも比較がしやすくなる[3]。全レース距離（＝1）を全レース時間（＝1）で走ったとき，レース全体の平均速度は1になり，各時刻の平均速度は1を基準とした値で表される。この規格化された各時刻の平均速度は，レース全体の平均速度1に対する比率を表しているため，区間速度比と呼ぶことにする[1]。レースのスタートからゴールまで，各時点における区間速度比がいつも1であれば，そのレースはイーブンペースのレースを意味する。ある時点ではペースを速く（1より大きく），ある時点では落とす（1より小さく）といったことが1を基準とした比率で考えられるので，ペースパターンを設計するときには区間速度比で考えると便利である。よって，ペースパターンは規格化された時間（横軸）と区間速度比（縦軸）とで表されるものとして考えていく。

2）ゆさぶりのあるペースパターンを構成する要素

ゆさぶりのあるレース全体のペースパターンは，おおまかな傾向を表す部分とゆさぶりを表す部分の和から構成されると考える。ペースパターンのおおまかな傾向とは，前半と中盤は少しおさえて後半にスパートするとか，徐々にペースを上げていくとかというような基本的なレース展開のことである。規格化された時間を $t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ とし，レース全体のゆさぶりのあるペースパターンを $V(t)$，おおまかな傾向を表す部分を $V_1(t)$，ゆさぶりを表す部分を $V_2(t)$ とすると，ゆさぶりのあるペースパターン $V(t)$ は，

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) \cdots ①$$

となる。

次にゆさぶりのあるペースパターンを設計する例としてペースパターンのモデルを，前半は少しペースを上げ，中盤は抑え，後半に向けて上げていきながらゆさぶりが入ってくると想定して，ゆさぶりのあるペースパターンを以下のように作成していく。

3）ペースパターンのおおまかな傾向 $V_1(t)$ の設定法

ペースパターンのおおまかな傾向は，前半・中盤・後半の最低3点で決められると考えられる。今回は，前半・中盤・後半のペースを前半は少しペースを上げ，中盤は抑え後半に向けて上げていくU字型を想定する。このとき，規格化された時刻と区間速度比の値はそれぞれ（0，1.02），（0.5，0.98），（1，1.05）と設定する（図1上図）。

この3点を通るなめらかな曲線を離散フーリエ変換によって求め，ペースパターンのおおまかな傾向 $V_1(t)$ として表した（図1下図）。このとき $V_1(t)$ は，

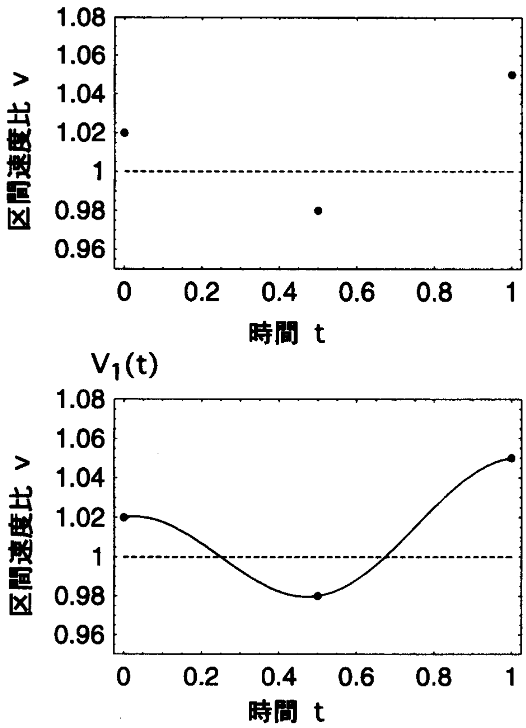

図1　レース全体のおおまかな傾向の設定値（上図）と離散フーリエ変換により表されたペースパターン（下図）

$$V_1(t) = 0.9925 + 0.03t + 0.0275\mathrm{Cos}(2\pi t) \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。

4）ゆさぶりを表す $V_2(t)$ の設定法

ゆさぶりを表す $V_2(t)$ は，Sin 波形の振幅が時間によって変化する関数として表す。つまり，$V_2(t) = J(t, p, q)\,\mathrm{Sin}(2\pi mt)$ とおく。Sin 波の振幅を表す $J(t, p, q)$ は，時間 t によって振幅の強さ（ゆさぶりの大きさ）が変化する関数で，ゆさぶり振幅関数とよぶことにする。ここで (p, q) は，時刻 p ($0 \leqq p \leqq 1$) のとき，ゆさぶり振幅関数 $J(t, p, q)$ が最大値 q をとることを示し，m はゆさぶりの振動回数を表している。今回は，$(p, q) = (0.8, 0.02)$ とした。このときゆさぶり振幅関数 $J(t, 0.8, 0.02)$ は，時刻 $t = 0.8$ で最大値 0.02 を取り，その両側は最大値に向けてなめらかに振幅が増加するように２次式でつないだ曲線とした（図２上図）。このゆさぶり振幅関数 $J(t, p, q)$ に $m = 3$ としてSin 波をかけたものを，ペースのゆさぶり $V_2(t)$ として表した（図２下図）。

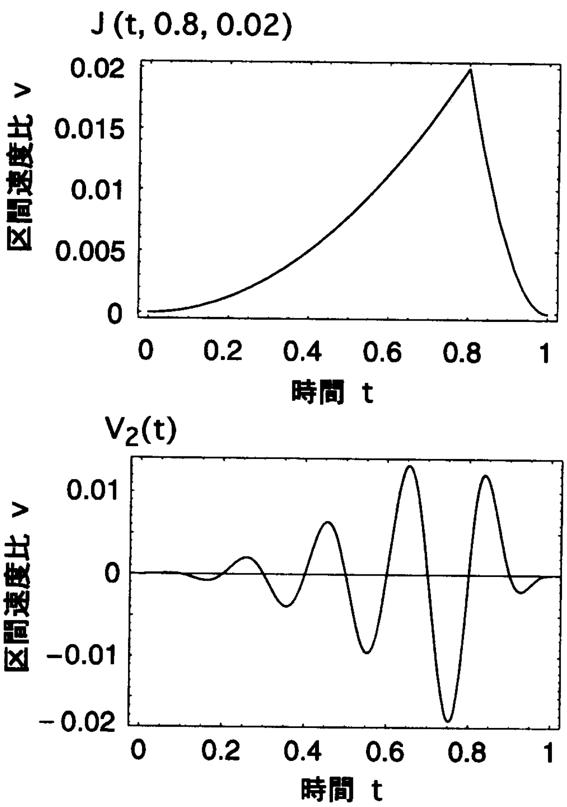

図２　ゆさぶり振幅関数の振幅の強さ変化（上図）とゆさぶり振幅関数（下図）

よって $V_2(t)$ は，

$$V_2(t) = J(t, 0.8, 0.02)\,\mathrm{Sin}(6\pi t) \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

$$J(t, 0.8, 0.02) = 0.03125t^2 \quad (0 \leqq t \leqq 0.8)$$
$$\qquad 0.5 - t + 0.5t^2 \quad (0.8 < t \leqq 1)$$

となる。

5）積分による補正

ゆさぶりのあるペースパターン V (t) は，②式の $V_1(t)$ と③式の $V_2(t)$ の和で表される（図３上図）。しかし，規格化した時間 t の区間［0，1］で V (t) を積分しても必ず１，すなわち距離が１にはならないので波形を平行移動して補正をする必要がある。これは最初に設定した３点の値が不適切であったことが大きな原因であるが，補正をしても波形が上下に移動するだけで，最初に考えた波形の形，ペースパターンの傾向は変わらない。

補正後のゆさぶりのあるペースパターンを V' (t) とすると，V' (t) は，

$$V'(t) = (1 - \int V(t)\,dt) + V(t)$$

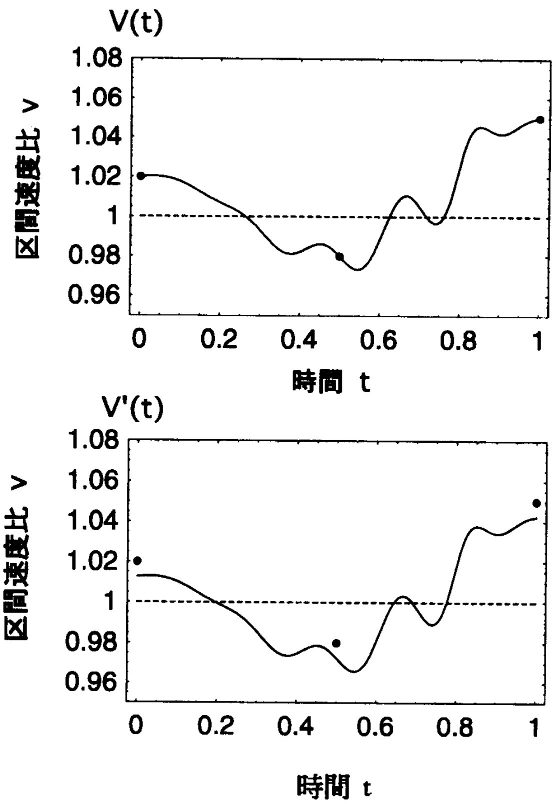

図３　ゆさぶりのあるペースパターン（上図：修正前、下図：ペースパターンを時間積分して１になるように波形を平行移動したもの）

となる。

最終的にゆさぶりのあるペースパターンは

$$V'(t) = 0.985 + 0.03t + 0.0275\mathrm{Cos}(2\pi t) + J(t, 0.8, 0.02)\,\mathrm{Sin}(6\pi t) \cdots ④$$

と表され，最初の定数項だけが補正される（図3下図）。

このようにして求められた④式が，前半は少しペースを上げ，中盤は抑え，後半に向けて上げていきながらゆさぶりが入ってくるゆさぶりのあるペースパターンとして作成された。

6）通過タイムの算出

ゆさぶりのあるペースパターンが④式で表されたので，この式を用いて規格化された任意の距離における規格化された通過タイム（以下タイム比とよぶ）が求められる。今回は10000mのレースを想定しているので1周のタイムがわかるよう，距離の区間を25等分して（表1．A欄），タイム比を算出した。このタイム比は積分区間を時刻 $[t_{j-1}, t_j]$ としたときの $\int V'(t)dt = 1/25$ $(j = 1, 2, \ldots, 25 : t_0 = 0)$ を満たす t_j のことで，

表1　通過タイムへの換算表と10000mを32分で走るときの例

A 距離比	B タイム比	C 距離（m）	D 通過タイム（分）	E 区間タイム（分）
0.00	0.0000	0	0．0	
0.04	0.0395	400	1．16	1.16
0.08	0.0790	800	2．32	1.16
0.12	0.1186	1200	3．48	1.16
0.16	0.1583	1600	5．4	1.16
0.20	0.1983	2000	6．21	1.17
0.24	0.2384	2400	7．38	1.17
0.28	0.2786	2800	8．55	1.17
0.32	0.3192	3200	10．13	1.18
0.36	0.3602	3600	11．31	1.19
0.40	0.4012	4000	12．50	1.19
0.44	0.4422	4400	14．9	1.19
0.48	0.4831	4800	15．27	1.19
0.52	0.5242	5200	16．47	1.19
0.56	0.5656	5600	18．6	1.19
0.60	0.6066	6000	19．25	1.19
0.64	0.6469	6400	20．42	1.17
0.68	0.6868	6800	21．59	1.17
0.72	0.7270	7200	23．16	1.17
0.76	0.7674	7600	24．33	1.18
0.80	0.8071	8000	25．50	1.16
0.84	0.8458	8400	27．4	1.14
0.88	0.8844	8800	28．18	1.14
0.92	0.9230	9200	29．32	1.14
0.96	0.9616	9600	30．46	1.14
1.00	1.0000	10000	32．0	1.14

t_j に関する方程式の正の実根として求められる（表1．B欄）。

次に表1を用いて実際のレースの通過タイムを求めてみる。レース距離を10000m，ゴールタイムを32分（1920秒）とすると，2000m地点（距離比0.20）の通過タイムは，距離比が0.1983であることから，

1920秒×0.1983≒380.7秒≒6分21秒

となる。このようにして各距離の通過タイムを求めていけば，④式で表されるゆさぶりのあるペースパターンを実現する通過タイム表が出来上がる（表1．D欄：E欄には区間タイムを示す）。また，ゴールタイムを変えれば，そのゴールタイムに応じた通過タイムが求められる。

以上のように，ゆさぶりのあるペースパターンは，まずレースのおおまかな傾向を決め，次にゆさぶりをどこの時点でどれくらい強くするかの手続きをとることで設計できた。レースのおおまかな傾向の設定値は3点であったが，もっと点の数を増やしたり，ゆさぶりを前半に持ってくるなどの変更を加えれば，いろいろな型のペースパターンができあがる。今後の課題としては，横軸が時間のために設計したペースパターンは，今回の例でいうと10000m走ではなく32分間走のペースパターンとなってしまうので，横軸を距離にした形でペースパターンが設計できる手法を開発していきたい。

3．結語

本研究の目的は，区間走速度比からみたゆさぶりのある中長距離走のペースパターンを数学的手法によって表現することである。ゆさぶりのあるペースパターンを表す数式モデルは，レースのおおまかな傾向である基本的なペースパターンを離散フーリエ変換による三角関数で表す部分と，ゆさぶりのところを時間によって振幅が変化するSin波形で表す部分の和として構成した。

レースのおおまかな傾向を決め，ゆさぶりをどこの時点でどれくらい強くするかを決めれば，

ゆさぶりのあるペースパターンが希望どおりに設計できる。このペースパターンをもとにすれば，ペースパターンを規格化して表しているためゴールタイムを設定するだけで，設計したペースパターンを実現できる通過タイム表がゴールタイムに応じて出来上がる。

このゆさぶりを含んだペースパターンから求められた通過タイム表を用いれば，より実践的な中長距離走の練習に役立つと思われる。

参考文献

1）東　洋功，小林一敏：数学モデルによるランニングのペースパターンの設計法，中京大学体育学論叢41，2，2000.

2）金原　勇：陸上競技のコーチング（Ⅰ），大修館書店，405-441, 1976.

3）菅原秀二，小林一敏：ランニングペースの数学モデル，日本体育学会第28回大会号，345, 1977.

4）永井　純：中・長距離・障害，ベースボールマガジン社，1989.

5）松尾彰文，杉田正明，阿江通良，小林寛道，岡田英孝：中長距離決勝におけるスピード，ピッチおよびストライドについて，世界一流陸上競技選手の技術（陸上競技連盟強化本部バイオメカニクス研究班編），92-111，ベースボールマガジン社，1994.