中京大学経済学論叢
4号
1992年12月

Dominant Diagonalを持つ行列の定義について
——一つの統一的定義——

中　山　恵　子

1．序

Mckenzie［3］も指摘しているように，dominant diagonalを持つ行列が，Leontief体系，微分方程式体系の安定条件をはじめとする経済理論のさまざまな分野で大きな役割を果たしていることは，周知の事実である。

さらに，Mckenzie以後，Hadamardの提示したdominant diagonalと等価な概念が，Henderson and Quandt［1］やTarr［4］によって示され，現在，dominant diagonalに関して，4種類の等価な概念が存在している。この理由の一端は，Mckenzieが，dominant diagonalと等価な概念としてquasi-dominant diagonalを定義し，経済分析に応用したことに求められるであろう。

そこで本稿では，各定義の長所を取り入れた統一的概念を提起し，諸概念間の等価性をより簡潔に証明しよう。

2．記号

本稿で使用される記号は，以下に定める通りである。但し，特に断りのない限り，本稿の分析対象は，複素数を要素とするｎ次正方行列$A=[a_{ij}]$とする。

$N=\{1, \cdots, n\}$	：番号集合
A^{-1}	：Ａの逆行列
A^{t}	：Ａの転置行列
$\det A$	：Ａの行列式
I	：ｎ次単位行列
$[0]$	：零行列
$J \subseteq N$	：ＪはＮの部分集合
$J \subset N$	：ＪはＮの真部分集合
$\# J$	：Ｊに属する全要素の個数
$J^{c}=N-J$	：全体集合Ｎに関するＪの補集合
ϕ	：空集合
A_{JK}	：a_{ij} $(i \in J,\ j \in K)$から構成されるＡの部分行列
$B(A) \equiv \begin{cases} \lvert a_{ii} \rvert & (i=1, \cdots, \min\{r, s\}) \\ -\lvert a_{ij} \rvert & (i \neq j) \end{cases}$	但し，Ａはｒ×ｓ型行列
$J(k)$	：Ｊからｋを除いた集合
$x=(x_1, \cdots, x_n)$	：ｎ次元行ベクトル
x_J	：x_i $(i \in J)$から成るｘの部分ベクトル
$x=0$	：$x_i=0 \quad (i=1, \cdots, n)$
$x \geqq 0$	：$x_i \geqq 0 \quad (i=1, \cdots, n)$
$x>0$	：$x_i>0 \quad (i=1, \cdots, n)$
$x \geq 0$	：$x \geqq 0$かつ$x \neq 0$
ℓ	：構成要素がすべて１であるｎ次元行ベクトル

3．定義と補題

本節は，次節導出の準備として，定義および補題の記述にあてる。

＜定義1＞Nの空でない真部分集合Jが存在し，すべての$i \notin J$，$j \in J$に対して$a_{ij}=0$であれば，行列Aは分解可能（decomposable）と言われる。また，Aが分解可能でなければ，すなわち，Nの空でない真部分集合Jに対して，$a_{ij} \neq 0$となる$i \notin J$，$j \in J$が存在するとき，Aを分解不能（indecomposable）と言う。[1)]

＜定義2＞行列Aは，次の条件，

$$x(B(A)) > 0$$

を満足する$x>0$が存在するとき，dominant diagonal（以下では，d.d.と略記）を持つと言われる。[2)] 尚，Aのすべての主対角要素が正ならば，Aはpositive dominant diagonal（p.d.d.）を持つと言われる。逆に，Aのすべての主対角要素が負であれば，Aをnegative dominant diagonal（n.d.d.）を持つと言う。

＜定義3＞行列Aは，次の条件，

$$x(B(A)) \geq 0$$

を満足する$x>0$が存在するとき，[3)] semi-dominant diagonal（s.d.d.）を持つと言われる。[4)]

1）この定義に従えば，任意の実数は，1次の分解不能行列と考えられる。

2）厳密に言えば，この定義は，2次以上の行列に対してだけ，有意味である。Aが1次行列，すなわち，$A=(a_{11})$の場合には，ある$x>0$が存在し，それに対して$x|a_{11}|>0$が満足されるとき，Aはd.d.を持つと言われる。

3）尚，このxを明示する必要があるときには，Aは，xを係数ベクトルとするs.d.d.を持つと言うこともある。

4）定義3も定義2と同様，Aが2次以上の行列であることを前提としている。Aが1次行列であれば，ある$x>0$に対して，$x|a_{11}|>0$が成立するとき，Aはs.d.d.を持つと言われる。それ故，Aが1次行列の場合には，d.d.とs.d.dは同一概念となる。

＜補題１＞行列Aが分解可能であるとき，以下の①～⑤の全条件を満足するようなN(= {1，…， n})の類別（partition）≡ {Q_1，…， Q_m}が存在する。

① $A_{N-\bigcup_{\ell=1}^{i} Q_\ell,\ Q_i} = [0]$　　（i = 1，…， m − 1）
② $\bigcup_{i=1}^{m} Q_i = N$
③ $Q_i \cap Q_j = \phi$　　（i ≠ j）
④ $Q_i \neq \phi$　　（i = 1，…， m）
⑤ $A_{Q_i Q_i}$（i = 1，…， m）は分解不能

証明　行列の次数に関する帰納法で証明する。

先ず，n = 2とすると，仮定された分解可能性から$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$の非対角要素の何れか一方が0である。$a_{21} = 0$または$a_{12} = 0$に応じて，$Q_1 = \{1\}$あるいは，$Q_1 = \{2\}$とし，$Q_2 \equiv N - Q_1$と定める。このとき，{$Q_1$，$Q_2$}が⑤以外の全結論を満足することは明白である。また，$A_{Q_i Q_i}$(i = 1， 2)は1次行列なので，分解不能性の定義により，⑤も満たされる。

次に，n ≧ 3としよう。Aの分解可能性から，$A_{LK} = [0]$となるようなK⊂Nが存在する。但し，L ≡ N − K。

もし，A_{KK}，A_{LL}がともに分解不能ならば，{K，L}が求めるNの類別である。従って，以下では，

（Ⅰ）　A_{KK}，A_{LL}がともに分解可能
（Ⅱ）　A_{KK}，A_{LL}の何れが一方のみが分解可能

の各場合について証明する。

（Ⅰ）　A_{KK}，A_{LL}の其々に帰納法の仮定を適用すれば，KとLの類別，{K_1，…， K_p}と{L_1，…， L_q}が存在し，

①’ $A_{K-\bigcup_{\ell=1}^{i} K_\ell,\ K_i} = [0]$　　（i = 1，…， p − 1）
②’ $\bigcup_{i=1}^{p} K_i = K$
③’ $K_i \cap K_j = \phi$　　（i ≠ j）

④' $K_i \neq \phi$ $(i=1, \cdots, p)$

⑤' $A_{K_i K_i}$ $(i=1, \cdots, p)$ は分解不能

および

①″ $A_{L-\bigcup_{\ell=1}^{i} L_\ell \; L_i}=[0]$ $(i=1, \cdots, q-1)$

②″ $\bigcup_{i=1}^{q} L_i = L$

③″ $L_i \cap L_j = \phi$ $(i \neq j)$

④″ $L_i \neq \phi$ $(i=1, \cdots, q)$

⑤″ $A_{L_i L_i}$ $(i=1, \cdots, q)$ は分解不能

となる。

$m \equiv p+q$

$$Q_i \equiv \begin{cases} K_i & (i=1, \cdots, p) \\ L_{i-p} & (i=p+1, \cdots, m) \end{cases}$$

と定めれば，mは確かに有限確定かつ$\{Q_1, \cdots, Q_m\}$が補題の②～④を満足することは容易に理解される。そこで，以下では，①の成立を示す。

最初に，$1 \leqq i \leqq p-1$ならば，

$$\begin{aligned} A_{N-\bigcup_{\ell=1}^{i} Q_\ell \; Q_i} &= A_{N-\bigcup_{\ell=1}^{i} K_\ell \; K_i} && \cdots Q_i \text{の定義} \\ &= A_{(N-K)\cup(K-\bigcup_{\ell=1}^{i} K_\ell) \; K_i} && \cdots N \supset K \supset \bigcup_{\ell=1}^{i} K_\ell {}^{5)} \\ &= \begin{pmatrix} A_{N-K \; K_i} \\ A_{K-\bigcup_{\ell=1}^{i} K_\ell \; K_i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで，A_{KK}に対する帰納法の仮定①'と$A_{N-K \; K_i}$が$A_{N-K \; K}=[0]$の部分行列であることに留意すれば，

$A_{N-\bigcup_{\ell=1}^{i} Q_\ell \; Q_i}=[0]$ $(i=1, \cdots, p-1)$

また，$K_p = Q_p \subset K = \bigcup_{\ell=1}^{p} Q_\ell$とKの定義から，$A_{N-\bigcup_{\ell=1}^{p} Q_\ell \; Q_p}=$ $A_{N-K \; K_p}$は$A_{N-K \; K}=[0]$の部分行列。故に，

$$A_{N-\bigcup_{\ell=1}^{i} Q_\ell \; Q_i}=[0] \qquad (i=1, \cdots, p) \tag{1}$$

次に，$p+1 \leqq i \leqq m-1$のときには，上述と全く同様にして，

5）一般に，$U \supset T \supset S \Rightarrow U-S=(U-T)\cup(T-S)$

$$A_{N-\bigcup_{\ell=1}^{i} Q_\ell \; Q_i} = A_{N-(\bigcup_{\ell=1}^{p} Q_\ell \cup \bigcup_{s=1}^{i} Q_s)\; Q_i} \qquad \cdots Q_i\text{の定義}$$

$$= A_{N-(K\cup\bigcup_{s=1}^{i-p} L_s)\; L_{i-p}} \qquad \cdots Q_i\text{の定義}$$

$$= A_{N-K-\bigcup_{s=1}^{i-p} L_s\; L_{i-p}} \qquad \cdots L_{i-p}\text{の定義}$$

$$= [0] \qquad (i = p+1, \cdots, m-1) \qquad (2)$$

$$\cdots A_{LL}\text{の分解可能性}$$

以上の(1)および(2)を併せれば，①，すなわち，

$$A_{N-\bigcup_{\ell=1}^{i} Q_\ell \; Q_i} = [0] \qquad (i = 1, \cdots, m-1)$$

が導かれる。

(Ⅱ)　A_{KK}(A_{LL})だけが分解不能であれば，(Ⅰ)の証明で，$p = 1$ かつ$Q_1 = K$($q = 1$ かつ$Q_m = L$)と置けばよい。これで証明が完結した。　(証明終)

注意：補題1の条件①$A_{N-\bigcup_{\ell=1}^{i} Q_\ell \; Q_i} = [0]$ ($i = 1, \cdots, m-1$) は，$A_{Q_i \; N-\bigcup_{\ell=1}^{i} Q_\ell} = [0]$と置き換えても差し控えない。

補題1で示されたNの類別に対応するAの各主座小行列$A_{Q_i Q_i}$($i = 1, \cdots, m$)を，行列の分解可能性を特徴付ける分解不能な主座小行列という意味で，今後は，ＩＰＳＤ（Indecomposable principal submatrix characterizing the decomposability）と呼ぶことにしよう。また，この用語を用いれば，分解不能行列のＩＰＳＤがその行列自身であることおよびその逆が真であることも自明である。このように考えれば，次に挙げる定義は，極めて自然であろう。

＜定義4＞行列ＡのすべてのＩＰＳＤがs.d.d.を持つとき，Ａは synthesized quasi-dominant diagonal（s.q.d.d.）を持つと言われる。[6)]

6）s.q.d.d.における（$x_{Q_1}, \cdots, x_{Q_m}$）が直ちに後述する他の3つの定義（定義5，6，7）での$x > 0$とはならないことは明らかである。但し，x_{Q_i}は，s.q.d.d.の定義におけるそれと同様とする。

この新たな概念，s.q.d.d.との比較の為，従来の概念を列挙しよう。

＜定義5＞ (Henderson and Quandt [1] pp. 371-372) 行列Aは，以下の条件，(a)または(b)の何れか一方を満足する$x > 0$が存在するとき，modified quasi-dominant diagonal (m.q.d.d.)を持つと言われる。

(a) Aが分解不能で，しかも

$$x(B(A)) \geq 0$$

(b) $A_{N-J\ J} = [0]$となるようなすべての$J \subset N$に対して，

$$x(B(A_{NJ})) > 0$$

で，なおかつ，

$$x(B(A)) \geqq 0$$

＜定義6＞ (Mckenzie [3] p.48の修正概念，Uekawa [6] p.198) ある$x > 0$が存在し，任意の$J \subseteq N$に対して，

$$x_J(B(A_{JJ})) \geq 0$$

が満足されるとき，行列Aはquasi-dominant diagonal (q.d.d.)を持つと言う。

＜定義7＞ (Tarr [4] p.172) 行列Aは，以下の条件，(a)または(b)の何れか一方を満足する$x > 0$が存在するとき，quasi-dominant diagonal by Tarr (t.q.d.d.)を持つと言われる。7) 8)

(a) Aは分解不能かつ

$$x(B(A)) \geqq 0$$

(b) ある置換行列Pが存在して，

7) Tarrは，定義6をrevised quasi-dominant diagonal，定義7をquasi-dominant diagonalと命名している。しかし，本来，quasi-dominant diagonalという概念を提示したのはMckenzieであること，さらには定義7がTarrによる概念であることを明示すべく，本稿では敢えて定義6および7を改称した。

8) Woodbury [7] (p.357, Corollay 3.6)は，レオンティエフ体系に関して，t.q.d.d.と実質的には同一の概念を提起している。この詳細は，補論を参照のこと。

$$
P^{t}AP=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots\cdots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & \cdots\cdots & A_{2m} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & A_{mm} \end{bmatrix}
$$

各A_{ii}($i=1$, …, m)は，Aの分解不能な主座小行列

および

$x_{J_i}(B(A_{ii}))\geq 0 \quad (i=1, \dots, m)$

但し，J_iはA_{ii}を構成する番号集合[9)]

次に,本稿の基本的主張とも言うべき補題2および補題2’を掲げる。

＜補題2＞s.q.d.d.を持つ行列Aは，d.d.を持つ。

証明　Aが分解不能であれば，Aはs.d.d.を持つ為，Taussky [5][10)]により，Aがd.d.を持つことは明らかである。

Aが分解可能ならば，補題1におけるNの類別，$\{Q_1, \dots, Q_m\}$が存在し，各$A_{Q_i Q_i}$($i=1$, …, m)は分解不能。各$A_{Q_i Q_i}$はs.d.d.を持つから，これらはd.d.を持つ。換言すれば，任意のQ_iを構成するすべての番号kに対して，

$x_k|a_{kk}|>\sum_{\ell\in Q_i(k)} x_\ell|a_{\ell k}|$

を満たす$x_{Q_i}>0$が存在する。上式は，

$x_k|-|a_{kk}||>\sum_{\ell\in Q_i(k)} x_\ell|a_{\ell k}|$

と書き換えられるが，これは，$-(B(A_{Q_i Q_i}))$がn.d.d.を持つことを意味する。それ故,$-(B(A_{Q_i Q_i}))$のどんな固有値の実部も負となる。[11)]

また，$(B(A_{Q_i Q_i}))$の定義から，$-(B(A_{Q_i Q_i}))$の非対角要素はすべ

9) 番号の部分集合J_i($i=1$, …, m)についての詳細は，補論参照のこと。

10) Taussky [5] p. 673は,「分解不能行列Aがs.d.d.を持てば，正則になる」と記述している。しかし，その証明の本質は，s.d.d.を持つ分解不能行列Aがd.d.を持つことに在る。

11) Mckenzie [3] p.58, Theorem2’　参照。

て非負。よって，任意のQ_iに対して，$\lambda^*_{Q_i} < 0$。但し，$\lambda^*_{Q_i}$は，$-(B(A_{Q_i Q_i}))$のフロベニウス根である。[12] さらに，$-(B(A))$のフロベニウス根をλ^*と表せば，行列式の性質と類別，$\{Q_1, \cdots, Q_m\}$による分解の形から，

$$\det(\lambda^* I - A) = \prod_{i=1}^{m} \det(\lambda^*_{Q_i} I_{Q_i Q_i} - A_{Q_i Q_i})$$

よって，

$$\lambda^* = \max_{i=1,\cdots,m} \lambda^*_{Q_i} < 0$$

従って，再びフロベニウスの定理[13] により，

$$0 \leq (0 \cdot I - (-B(A)))^{-1} = (B(A))^{-1}$$

それ故，任意の$y > 0$に対して，

$$x \equiv y(B(A))^{-1} > 0$$

と定めれば，

$$x(B(A)) > 0$$

これで，Aがd.d.を持つことが示された。 (証明終)

d.d.を持つ行列の正則性を与えるHadamardの定理[14] は周知であるが，それによれば，s.q.d.d.を持つ行列の正則性も自ら明らかである。そこで，この含意を補題２’として掲げておこう。

＜補題２’＞s.q.d.d.を持つ行列は，正則である。

さて，上述した諸概念の等価性を示す本稿の主要定理に先立ち，s.q.d.d.と他の概念との直接的な異同について触れておこう。

定義５と定義７を一見すれば，m.q.d.d.およびt.q.d.d.における条件（b）がAの分解可能性を前提としていることは明らかである。従って，d.d.の概念は別としても，分解可能性，分解不能性の各場合に分類せずに定義を与えたのは，Mckenzie [3] 唯一人ということになる。

12) Kemp and Kimura [2] p.80, Lemma5　参照。
13) Kemp and Kimura [2] p.77, Lemma4　参照。
14) Kemp and Kimura [2] pp.7-8, Theorem6（i）　参照。

しかし，その反面，彼は，すべての主座小行列を分析対象として扱うという犠牲を払わねばならなかった。他方，Henderson and Quandt [1]やTarr [4] は，対象とすべき主座小行列の特定化には成功したものの，彼らの定義を，行列が分解可能であるか否かに応じて二分せざるを得なかった。

以上に対し，s.q.d.d.の条件は，行列の分解可能性，分解不能性に拘らず形式上統一的に記述され，しかも，d.d.を持つ為の鍵となる部分行列を，ＩＰＳＤという形で明示している。従って，s.q.d.d.は，いわばMckenzie [3] の修正概念を精緻化したものとして位置付けられよう。

また，s.q.d.d.は，m.q.d.d.，q.d.d.およびt.q.d.d.に比較し，やや実用上の利点も主張できる。何故ならば，s.q.d.d.の正否は，各ＩＰＳＤがs.d.d.を持つことを確かめればよいだけであるのに対し，後三者の場合は，あるｎ次ベクトル $x > 0$ が存在し，考察すべき主座小行列が，それに対応した x の部分ベクトルを係数とするs.d.d.を持つことを確かめねばならないからである。

4．主要な結論

本稿の主張は，次の定理に要約される。

＜定理＞以下の(ｉ)～(ｖ)は，互いに等価である。

(ｉ)　行列Ａはd.d.を持つ。　＜定義２＞
(ii)　行列Ａはm.q.d.d.を持つ。　＜定義５＞
(iii)　行列Ａはq.d.d.を持つ。　＜定義６＞
(iv)　行列Ａはt.q.d.d.を持つ。　＜定義７＞
(ｖ)　行列Ａはs.q.d.d.を持つ。　＜定義４＞

証明　(ｉ)が(iii)～(ｖ)を意味することおよび(iii)から(ii)が導かれ

ることは，何れも自明である。それ故，(iv)⇒(i)，(v)⇒(i)と(ii)⇒(v)を示せば，証明は完結する。しかし，前二者は，補題2の直接的帰結であるから，結局，(ii)⇒(v)だけを証明すればよい。

(ii)⇒(v)　Aが分解不能な場合のm.q.d.d.の定義は，Aの唯一のIPSDであるA自身がs.d.d.を持つ，すなわち，Aがs.q.d.d.を持つことに他ならない。

従って，以下では，Aを分解可能な場合に限定し，背理法によって証明する。

Aは分解可能であるから，背理法の仮定により，Nの類別，$\{Q_1, \cdots, Q_m\}$中にあるQ_kが存在し，任意のy_{Q_k}に対して，

$$y_{Q_k}(B(A_{Q_k Q_k})) \ngeq 0$$

それ故，m.q.d.d.の定義からその存在が保証されているxの部分ベクトル$x_{Q_k}>0$に対して，

$$x_{Q_k}(B(A_{Q_k Q_k})) \ngeq 0 \tag{3}$$

あるいは，

$$x_{Q_k}(B(A_{Q_k Q_k})) = 0 \tag{4}$$

が成立する。

もし，(3)が成立すれば，Q_k中のある番号j_oに対して，

$$x_{j_o}|a_{j_o j_o}| < \sum_{i \in Q_k(j_o)} x_i |a_{ij_o}| \tag{5}$$

他方，m.q.d.d.の定義から

$$x(B(A)) \geqq 0$$

故に，その第j_o不等式は，

$$\begin{aligned} x_{j_o}|a_{j_o j_o}| &\geqq \sum_{i \in N(j_o)} x_i |a_{ij_o}| \\ &= \sum_{i \in Q_k(j_o)} x_i |a_{ij_o}| + \sum_{i \in N-Q_k} x_i |a_{ij_o}| \end{aligned} \tag{6}$$

(5)と(6)から直ちに，

$$x_{j_o}|a_{j_o j_o}| < \sum_{i \in Q_k(j_o)} x_i |a_{ij_o}| \leqq x_{j_o}|a_{j_o j_o}|$$

これは，自己矛盾である。

また，(4)が成立するときには，Q_k中の任意の番号jに対して，

$$x_j|a_{jj}| = \sum_{i \in Q_k(j)} x_i |a_{ij}| \leqq \sum_{i \in N(j)} x_i |a_{ij}| \leqq x_j |a_{jj}|$$

但し，最右端の不等号は，m.q.d.d.の定義，$x(B(A)) \geqq 0$によっている。従って，

$$x_j \mid a_{jj} \mid = \sum_{i \in Q_k(j)} x_i \mid a_{ij} \mid = \sum_{i \in N(j)} x_i \mid a_{ij} \mid = x_j \mid a_{jj} \mid \qquad (7)$$

(7)は，

$$\sum_{i \in (N-Q_k)} x_i \mid a_{ij} \mid = 0$$

を意味するから，$(N-Q_k)$中の任意の番号 i，Q_k中の任意の番号 j に対して，$a_{ij}=0$。すなわち，

$$A_{N-Q_k\ Q_k} = [0] \qquad (8)$$

故に，m.q.d.d.の定義，(4)および(8)から，再度，次の自己矛盾が導かれる。

$$0 \leq x(B(A_{N\ Q_k})) = x_{Q_k}(B(A_{Q_k\ Q_k})) + x_{N-Q_k}(B(A_{N-Q_k\ Q_k})) = 0$$

(証明終)

さて，Tarrの定理[15)]が上記定理の系として得られることは容易に理解されるが，より注意すべきは，本定理の実質的証明が，Tarrの証明の一部を遥かに簡略化した別証となっていることである。実際，Tarrは，4つの概念の等価性を，[(iv)t.q.d.d.⇒Hawkins-Simon条件を満足⇒(i)d.d.⇒(iii)q.d.d.⇒(ii)m.q.d.d.⇒(iv)t.q.d.d.] と循環的に示したが，本定理証明中の(ii)⇒(v)は，彼の(ii)⇒(iv)を代替するものである。

補論

Woodbury [7]は，分解可能な投入係数行列$A \geqq [0]$に対応するNの類別$\{Q_1, \cdots, Q_m\}$[16)] に適当な置換を施して，新しい類別，

$$W_i = \{(\sum_{\ell=1}^{m-1} \# Q_\ell) + 1, \cdots, \sum_{\ell=1}^{m+1-i} \# Q_\ell\} \qquad (i=1, \cdots, m-1)$$

$$W_m = \{1, \cdots, \# Q_1\} \qquad (i=m)$$

15) Tarr [4] pp.172-174.

16) 詳細は，補題1を参照のこと。

を作成し，Aを

$$\begin{bmatrix} A_{W_m\ W_m} & 0 & 0\ \cdots & 0 \\ A_{W_{m-1}\ W_m} & A_{W_{m-1}\ W_{m-1}} & 0\ \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ A_{W_1\ W_m} & A_{W_1\ W_{m-1}} & \cdots\cdots & A_{W_1\ W_1} \end{bmatrix} \qquad <1>$$

と分解した上で，任意の $v \geq 0$ に対して，$u(I-A)=v$ が非負解を持つ為の必要・十分条件として，

$$\ell A_{N\ W_i} \leq \ell_{W_i} \qquad (i=1, \cdots, m) \qquad <2>$$

を挙げている。

他方，$\{Q_1, \cdots, Q_m\}$ は，適当な置換によって，新しい類別，

$$J_1=\{1, \cdots, \# Q_1\} \qquad (i=1)$$

$$J_i=\{(\sum_{\ell=1}^{i-1}\# Q_\ell)+1, \cdots, \sum_{\ell=1}^{i}\# Q_\ell\} \qquad (i=2, \cdots, m)$$

に変換される。Tarr [4]によるt.q.d.d.の条件(b)[17] における置換行列Pが $\{Q_1, \cdots, Q_m\}$ から $\{J_1, \cdots, J_m\}$ を作成する置換を表し，A_{ii} $(i=1, \cdots, m)$ が $A_{J_i\ J_i}$ に他ならないことは明らかである。

それ故，t.q.d.d.の条件(b)は，「ある置換行列P用いて，Aが

$$P^t AP=\begin{bmatrix} A_{J_1\ J_1} & A_{J_1\ J_2} & \cdots\cdots & A_{J_1\ J_m} \\ 0 & A_{J_2\ J_2} & \cdots\cdots & A_{J_1\ J_m} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & A_{J_m\ J_m} \end{bmatrix} \qquad <3>$$

と分解され，適当な $x>0$ に対して，

$$x_{J_i}(B(A_{J_i\ J_i})) \geq 0 \qquad (i=1, \cdots, m) \qquad <4>$$

但し，各 $A_{J_i\ J_i}$ は分解不能」と改められる。

17) 定義7参照。

Woodburyの条件＜２＞が成立していれば，任意のW_i（$i=1, \cdots, m$）に対して，

$$\ell_{W_i} A_{W_i W_i} \leq \ell_{W_i} \qquad (i=1, \cdots, m) \qquad ＜５＞$$

よって，$A_{W_i W_i}$（$i=1, \cdots, m$）のフロベニウス根，$\lambda^*_{W_i}$は１を越えない。さらに，＜５＞と補題２’とは，$I_{W_i W_i}-A_{W_i W_i}$の正則性を保証するから，

$$\lambda^*_{W_i} < 1 \qquad (i=1, \cdots, m) \qquad ＜６＞$$

ここで，Aのフロベニウス根をλ^*と表せば，＜１＞，＜６＞および行列式の性質から，

$$\lambda^* = \max_{i=1,\cdots,m} \lambda^*_{W_i} < 1$$

従って，フロベニウスの定理[18]により，

$$(I-A)^{-1} \geq 0$$

故に，任意の$y>0$に対して，

$$z \equiv y(I-A)^{-1}$$

と定めれば，$z>0$かつ$zA<z$。これは，さらに，z_i[19]を第i対角要素（$i=1, \cdots, m$）とする対角行列$\hat{Z}$を用いて，

$$\ell(\hat{Z} A \hat{Z}^{-1}) < \ell$$

と変換される。それ故，任意のW_i（$i=1, \cdots, m$）に対して，

$$\ell(\hat{Z} A \hat{Z}^{-1})_{N W_i} < \ell_{W_i} \qquad (i=1, \cdots, m) \qquad ＜７＞$$

$\hat{Z} A \hat{Z}^{-1}$とAとは互いに相似な行列であるから，＜７＞と＜２＞は，実質的には等価である。また，$I_{W_i W_i}-A_{W_i W_i}$（$i=1, \cdots, m$）は，$A_{W_i W_i}$（$i=1, \cdots, m$）が分解不能であるときかつそのときに限り分解不能である。従って，Tarrの条件＜４＞をWoodburyの条件＜２＞とを同一視してよい。

以上から，Woodburyは，考察対象をレオンティエフ型行列に限定したものの，本質的にはt.q.d.d.と同一概念を，Tarrに約二十年近くも先駆けて提示していたと結論すべきであろう。

---

18) Kemp and Kimura [2] p84, Theorem2（ii）。

19) n次元行ベクトルzの第i要素（$i=1, \cdots, m$）。

参考文献

[1] Henderson, J. and R. Quandt, Microeconomic Theory : A Mathematical Approach, 2nd edition, McGraw Hill Book Company, New York, 1971.

[2] Kemp, M.C. and Y. Kimura, Introduction to Mathematical Economics, Springer-Verlag, New York, 1978.

[3] Mckenzie, L., "Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory," in Arrow, K.J., S. Karlin and P. Suppes (eds.), Mathematical Methods in the Social Sciences, Stanford University Press, Stanford, 1960, pp. 47-62.

[4] Tarr D.G., "A Note on the Dominant Diagonal Martrix and its Extensions," Economic Studies Quarterly, vol.28, no.2, 1977, pp. 170-175.

[5] Taussky, O., "A Recurring Theorem on Determinants," American Mathematical Monthly, vol.56, 1949, pp. 672-676.

[6] Uekawa, Y., "Generalization of the Stolper-Samuelson Theorem," Econometrica, vol.39, 1971, pp. 197-217.

[7] Woodbury, M.A., "Properties of Leontief-type Input-Output Matrices," in Morgenstern, O. (ed.), Economic Activity Analysis, John Wiley and Sons, INC., 1954, pp. 341-363.